Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques ”à calculatrice” et leur écologie

Michèle Artaud

ANALYSER DES PRAXÉOLOGIES MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUES « À CALCULATRICE » ET LEUR ÉCOLOGIE

Michèle Artaud
IUFM D'AIX-MARSEILLE

Les études d'écologie didactique (Rajoson 1988, Artaud 1998) ont mis en évidence que l'introduction d'un objet dans le système d'enseignement ne va pas de soi : elle modifie notamment l'équilibre écologique du système en détruisant certaines interrelations entre objets et en en créant de nouvelles ; en outre, l'objet introduit doit se créer un emploi didactique, et donc entre en conflit, dans la plupart des cas, avec d'autres objets, plus anciennement installés, qui occupent au moins partiellement cet emploi. Les objets informatiques n'échappent pas à cette règle et l'examen de leur intégration dans le système d'enseignement passe par une étude soigneuse de conditions écologiques dont les niveaux de détermination didactique (Chevallard 2002) vont des plus génériques aux plus spécifiques. C'est dans cette perspective que nous situons cette communication, dont l'objet est de présenter certaines conditions écologiques d'intégration des TIC dans l'étude scolaire des mathématiques.

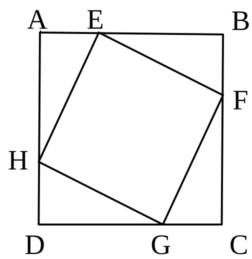
Le cœur du travail du professeur peut se décliner en deux questions: qu'est-ce que j'enseigne ? comment je l'enseigne ? Une praxéologie mathématique va permettre de modéliser la réponse à la première question tandis qu'une praxéologie didactique permettra de modéliser la réponse à la deuxième question – une praxéologie étant composée *de types de tâches* à accomplir, de *techniques* permettant d'accomplir ces types de tâches, de *technologies* justifiant, produisant et rendant intelligibles ces techniques et de *théories* justifiant, produisant et rendant intelligibles ces technologies (Chevallard 1999)[1].

L'utilisation des calculatrices ou des logiciels par un professeur a ainsi deux visages : elle peut être intégrée dans la matière mathématique enseignée ; elle peut également être intégrée dans les organisations de l'étude mise en place par le professeur ; ces deux visages étant dialectiquement liés dès lors que les praxéologies mathématiques sont construites dans le système didactique à l'aide de praxéologies didactiques. Nous donnerons d'abord quelques exemples de la façon dont les calculatrices sont insérées dans les praxéologies avant d'examiner ce qui pourrait, devrait exister et des conditions écologiques d'intégration des calculatrices dans les classes de mathématiques.

1. EXEMPLES D'UTILISATION D'UNE CALCULATRICE EN CLASSE DE SECONDE

Considérons ici une séance observée dans une classe de seconde dont l'objet d'étude principal est le problème suivant :

> Soit ABCD un carré de côté 8 mètres. Sur les segments [AB], [BC], [CD], et [DA] on place les points E, F, G et H tels que : AE = BF = CG = DH = x
>
> Trouver pour quelle valeur de x le quadrilatère EFGH a une aire minimale.

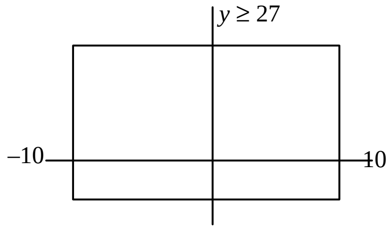


[1] On trouvera en annexe une présentation sommaire de la notion de praxéologie didactique.

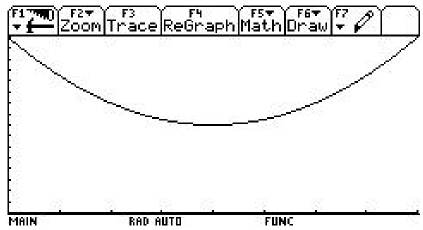
Elle se laisse découper en trois épisodes de longueur inégale : la modélisation du problème qui aboutit à l'expression de l'aire du carré[2] en fonction de x ; la détermination du minimum de la fonction ainsi obtenue sur l'intervalle [0, 8] et la donnée d'un exercice à faire hors classe.

Nous reproduisons ci-dessous un extrait du compte rendu correspondant : la classe vient d'établir l'expression de l'aire du carré *EFGH*, $\mathsf{A}_{EFGH} = 2x^2 - 16x + 64$, et le professeur propose de vérifier la conjecture formulé par un élève, à savoir que l'aire est minimale « au milieu ».

> P a programmé la fonction à étudier sur une calculatrice TI-92 dont elle projette l'écran au tableau. Mais aucune courbe n'apparaît à l'écran ! P indique qu'elle va donc changer la fenêtre. « Pourquoi ne voit-on pas la représentation graphique ? », demande-t-elle. Elle schématise rapidement la situation au tableau (voir figure ci-contre).

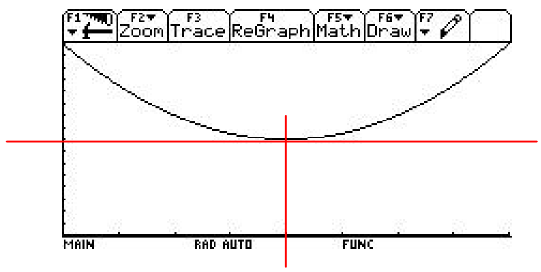


> En interaction avec P, un élève précise que, pour $x = 8$, EFGH est confondu avec ABCD, d'aire 64 ; donc il faut avoir $y = 64$. Une élève demande si ça a un sens, pour $x = 0$, de définir le carré [EFGH]. P lui fait expliciter que, alors, E = A, etc. Mais l'élève conclut que… ça n'a pas de sens ! P rectifie son propos, s'assure de l'accord de la classe et poursuit en faisant apparaître la courbe à l'écran de la calculatrice (voir figure ci-contre).



> P constate que le minimum semble atteint vers $x = 4$, et vaut à peu près 32 : « Ce que disait Ant semble vrai ! Il va falloir le démontrer par le calcul ». Elle dicte : « Il semble que l'aire du carré EFGH soit minimale pour $x = 4$ et cette aire vaut 32 ». Elle répète : « … et qu'elle vaut 32 ». Une élève : « et qu'elle vaille ». P ne comprend pas, l'élève répète son objection, P finit par comprendre et par approuver.
> Elle écrit alors :
> $\mathsf{A}_{\text{EFGH}} = 2x^2 - 16x + 64$
> Soit f la fonction
>
> Elle continue en dictant : « définie sur l'intervalle… » Elle interroge la classe : « Quel intervalle ? » Réponse : [0, 8]. P poursuit : « … sur [0, 8] et qui à x associe… ». Une élève : « Trente-deux ! » Elle se reprend aussitôt : « Oh pardon ! ». P continue : « … l'aire du carré… » Une élève : « ABCD ». Une autre élève réplique. P achève sa formulation : « … EFGH, c'est-à-dire qui à x associe… » Un élève à son tour : « Trente-deux ». En dialogue avec la classe elle écrit : $f(x) = 2x^2 - 16x + 64$
> Elle indique : « On va voir si $f(4) = 32$ par le calcul ». Puis elle écrit : Montrons que $f(4) = 32$.

La calculatrice permet donc de tracer la courbe représentative de la fonction dont il s'agit de déterminer le minimum et de la rendre visible pour le collectif, la détermination du minimum se faisant alors par lecture graphique.



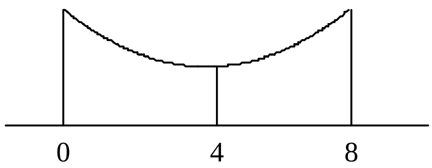
Notons que si l'on peut douter de la valeur 4 en laquelle f admet un minimum, la courbe représentative étant aplatie au voisinage de 4, la valeur de la fonction en 4 ne fait, elle, aucun doute (moyennant éventuellement un changement de graduation) puisque les coefficients

[2] On notera que ce problème avait été antérieurement étudié en géométrie, et que la question de la nature du quadrilatère EFGH a ainsi été rapidement élucidée au début de l'étude.

du trinôme considéré étant entiers, l'image d'un entier est un entier (voir figure ci-contre). Le calcul de $f(4)$ peut donc paraître superflu – si l'on ne tient pas compte de la nécessité du travail de la technique de calcul « à la main ».

Après avoir calculé $f(4)$, P poursuit le travail avec la classe.

> P : « Bonne conjecture ! Ensuite, que nous disait Ant ? » Elle dessine *grosso modo* le contenu de l'écran de la calculatrice (figure ci-contre.).



> P : « C'est ça ? » Les élèves : « Oui, en gros ! » P fait apparaître à nouveau l'écran de la calculatrice. Elle tente de raisonner avec la classe en s'appuyant sur l'image à l'écran. La conclusion se met lentement en place : le fait crucial est que les points de la courbe sont au-dessus du point (4 ; 32). P : « Donc ça veut dire que $f(x)$ est supérieur à… ? » Un élève : « … à trente-deux ! ». P reformule sa question ; un élève complète : « … à 4 ». Il rectifie aussitôt : « Sur les ordonnées, à 32 ». P valide la réponse et écrit : Montrons que $f(x) \geq 32$ pour $x \in [0, 8]$

C'est toujours pour la représentation graphique de la fonction que la calculatrice est utilisée dans ce deuxième épisode : celle-ci sert en cette occasion à faire émerger l'inégalité qu'il s'agira de montrer algébriquement, $f(x) \geq 32$.

On voit donc ici émerger une technique τ d'étude du type de tâches T « Déterminer l'extrémum d'une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ sur un intervalle donné », technique qui consiste, en une première étape, à déterminer par une étude numérico-graphique, à l'aide d'une calculatrice, la valeur m de la variable x pour laquelle f atteint un extrémum ; puis, en une seconde étape, à démontrer algébriquement que, sur l'intervalle considéré, on a bien $f(x) \geq f(m)$ (ou, selon le cas, $f(x) \leq f(m)$). La calculatrice apparaît ainsi dans la réalisation du moment exploratoire relatif à la pratique $[T/\tau]$, comme un ingrédient permettant d'obtenir une représentation graphique de la fonction exploitable collectivement. Dans la séance observée, son utilisation fait partie pour l'essentiel du *topos* du professeur et ne laissera apparemment pas de trace écrite dans les cahiers des élèves, à moins que les élèves ne reproduisent de leur propre chef le schéma effectué par le professeur au tableau. Rien ne permet d'affirmer, en ce point, que cette pratique va s'intégrer dans le travail des élèves ou que, au contraire, la frontière topogénétique que nous venons de signifier est stabilisée.
Considérons alors l'exercice donné à la fin de la séance précédente :

> 95 ★★ Dans une région, lorsqu'il y a une multitude de lièvres, les renards sont bien nourris et leur population augmente. Lorsque les renards sont devenus trop nombreux, ils mangent trop de lièvres et la population de lièvres est rapidement décimée. On a établi que sur une période allant de $t = 0$ à $t = 18$ ans, la population de lièvres est donnée par : $f(t) = -5{,}5t^2 + 88t + 528$.
> 1° Dans un repère orthogonal bien choisi, représenter cette fonction f.
> 2° a) À l'aide de la calculatrice, trouver à quel moment m cette fonction atteint un maximum.
> b) Exprimer $f(t) - f(m)$ en fonction de t et démontrer la conjecture faite.
> c) Déterminer à quel moment la population de lièvres est de nouveau égale à celle observée en $t = 0$.

En même temps que l'exercice, P a distribué un document donnant, dit-elle, « le tableau de valeurs pour pouvoir construire la courbe » et que nous avons reproduit ci-dessous :

Moment de la période en années	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Population de lièvre	528	610,5	682	742,5	792	830,5	858	874,5	880

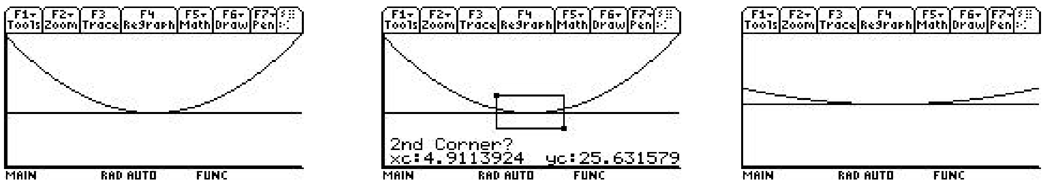
Moment de la période en années	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Population de lièvre	875	858	831	792	743	682	611	528	435	330

La technique précédente, où la calculatrice servait à obtenir la courbe de la fonction, est ici court-circuitée, malgré la présence de la deuxième question, par la demande préalable de tracé de la courbe *et* la distribution du tableau de valeurs : le tableau de valeurs comporte en effet le maximum, qui est atteint en 8 et vaut 880. On remarquera de ce point de vue que le tracé de la courbe n'apporte rien de plus à l'étude de la situation que la donnée du tableau de valeurs. Il en aurait été autrement si les deux premières questions de l'exercice avaient été remplacées par la question suivante :

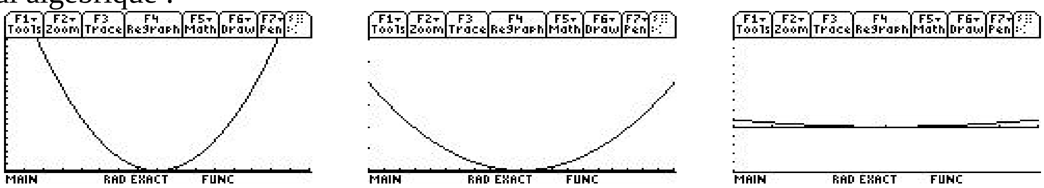
> À l'aide de la calculatrice, trouver à quel moment *m* cette fonction atteint un maximum. On rendra compte de cette étude en reproduisant la courbe représentative obtenue à la calculatrice et en y matérialisant le maximum ;

les élèves ayant alors à mettre en œuvre le même style d'étude que celle effectuée en classe sous la direction du professeur[3].

Le tracé de la courbe à la calculatrice a toute chance de disparaître de la technique mise en œuvre par l'élève, puisqu'il a ici le statut de vérification du travail effectué précédemment et que l'étape de vérification n'est pas intégrée aux techniques mises en place. On notera à cet égard que des occasions de vérifier à l'aide de la calculatrice n'ont pas été saisies lors de la séance. Ainsi, avant de passer à l'étude algébrique de l'inéquation (conjecturale) $f(x) \geq 32$, on aurait pu mettre en œuvre une vérification graphique à l'aide de la calculatrice par le simple tracé de la droite $y = 32$, et en utilisant éventuellement la fonction *zoom* :



Ou encore par la considération de la fonction $f(x) - 32$, qui aurait permis en outre de piloter le calcul algébrique :

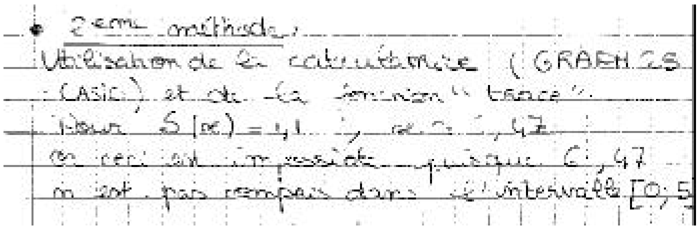


Le tracé signifiant qu'on obtient une fonction positive qui s'annule en 4, le travail algébrique doit mettre en évidence un facteur $(x - 4)^2$.

Rendons nous maintenant dans une autre classe de seconde, dont l'activité est observée à travers des traces écrites. La description par le professeur de l'étude effectuée mentionne que les « fonctions graphiques de la calculatrices » ont été travaillées, et notamment la « fonction Trace », mais aucune trace écrite ne reste de ce travail dans les cahiers des élèves. Dans un devoir donné à faire hors classe, il s'agit de résoudre l'équation $S(x) = 41$ avec $S(x) = 2(x - 3)^2 + 17$, pour x élément de $]0 ; 5[$. Un des trois élèves dont la copie est photocopiée met en œuvre successivement deux techniques : la première, purement algébrique, consiste à se ramener à une équation de la forme $X^2 = a$, puis à résoudre cette équation ; la seconde, à utiliser la fonction Trace de la calculatrice à partir de la représentation graphique de la fonction S sur l'écran (voir ci-dessous). La copie ne comporte aucun commentaire, et le corrigé du devoir qui a été distribué ne mentionne que la première technique. Au devoir surveillé qui suit, l'élève ne met en œuvre que la première technique – du moins publiquement.

---

[3] On notera cependant que le travail doit être effectué à propos d'un type de tâches, « Déterminer un maximum », qui diffère de celui étudié en classe.



• 2ème méthode :
Utilisation de la calculatrice (GRAPH 25
CASIO) et de la fonction " trace ".
Pour S(x) = 4,1 ; x ≈ 6,47
or ceci est impossible puisque 6,47
n'est pas compris dans l'intervalle [0 ; 5]

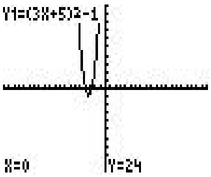
2. INTÉGRER LA CALCULATRICE DANS LES PRAXÉOLOGIES MATHÉMATIQUES

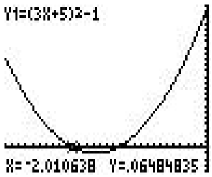
Les deux exemples que nous venons de présenter sont représentatifs de ce qui existe dans les classes de mathématiques du point de vue de l'utilisation de la calculatrice : la calculatrice est utilisée dans la réalisation des praxéologies didactiques, le plus souvent par le professeur, sans que cela se traduise dans les traces écrites et dans les praxéologies mathématiques construites ; lorsque des techniques « à calculatrice » sont fabriquées, elles coexistent avec des techniques mathématiques dont la calculatrice est absente, ce qui conduit à la disparition des techniques « à calculatrice » de la composante publique du rapport institutionnel.

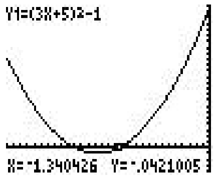
La disparition des techniques à calculatrices est conforme à la loi écologique: « on ne peut avoir dans un habitat donné qu'une espèce occupant la même niche ». Si l'on veut que la calculatrice soit présente dans les praxéologies mathématiques, il faut donc fabriquer des techniques « mixtes », qui intègrent la calculatrice. Sous le titre « ***Mise en équation ; résolution algébrique et graphique d'équations et d'inéquations*** », le document d'accompagnement du programme de seconde évoque une technique de résolution des équations et des inéquations dans laquelle la calculatrice graphique serait insérée comme permettant de représenter des fonctions :

> Un élève ayant à résoudre une équation comme $(x - 2)^2 = 9$ perçoit assez facilement que l'égalité est bien vérifiée pour $x = 5$ et il se contente alors de donner cette seule solution ; il a même souvent quelques réticences à mettre en œuvre toute technique permettant d'aboutir à l'ensemble des solutions. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto (x - 2)^2$ qui met bien en évidence l'existence de deux solutions incitera à dépasser le premier raisonnement. Pour la résolution de $x^2 + 2x + 3 = 0$, on peut là aussi s'appuyer sur la représentation graphique qui montre bien l'absence de solution, confirmée ensuite par $(x+1)^2 + 2 = 0$; il peut être intéressant aussi de laisser un élève développer l'expression, tenter de la factoriser, proposer comme solution $x = -3 / (x + 2)$ et le faire réfléchir sur sa proposition. De même, une calculatrice graphique montre facilement que les équations $x (x + 1) = (2x + 3) (x + 1)$ et $x = 2x + 3$ n'ont pas les mêmes solutions. Un autre exemple est l'utilisation de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2 + 3x - 10$ pour conjecturer que 2 est une solution de l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$; le calcul permet de vérifier facilement que c'est bien le cas ; il reste à anticiper un peu sur la factorisation et à vérifier que $(x - 2) (x + 5)$ est bien une écriture possible pour l'expression $x^2 + 3x - 10$ pour aboutir à la résolution de l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$.
>
> Ces quelques exemples montrent comment le point de vue des fonctions peut enrichir la réflexion sur la résolution d'équations. Ces remarques s'appliquent encore plus à la résolution d'inéquations puisque l'ensemble des solutions ne se réduit presque jamais à une seule valeur.

Examinons ainsi l'inéquation $(3x + 5)^2 \geq 1$. Posons $h(x) = (3x + 5)^2 - 1$; une première représentation graphique sur l'intervalle [–10 ; 10] suggère que l'équation $h(x) = 0$ a deux solutions. La représentation sur l'intervalle [–4 ;0] donne comme valeurs des solutions : $x = -2$ et $x = -1{,}33$.







Une table des valeurs confirme la valeur $x = -2$, mais infirme la valeur –1,33 qui n'est qu'une valeur approchée de la solution cherchée. La mise en facteur de l'expression de h donne alors les valeurs exactes : $h(x) = (3x + 5)^2 - 1 = (3x + 5)^2 - 1^2 = (3x + 5 - 1)((3x + 5 + 1) = (3x + 4)(3x + 6) = 3(x + 2)(3x + 4)$ et la deuxième solution est $x = -4/3$, dont une valeur approchée à 10^{-2} près est bien –1,33.

X	Y1
-1.37	-.2079
-1.36	-.1536
-1.35	-.0975
-1.34	-.0396
-1.33	.0201
-1.32	.0816
-1.31	.1449

X=-1.37

X	Y1
-2.5	5.25
-2.4	3.84
-2.3	2.61
-2.2	1.56
-2.1	.69
-2	0
-1.9	-.51

X=-2.5

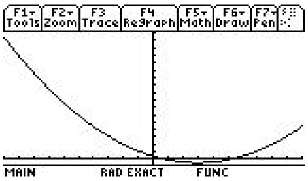
-4/3
-1.333333333

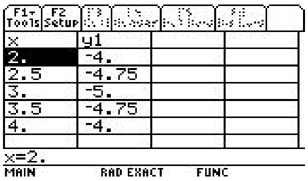
La représentation graphique permet en outre l'affirmation expérimentale : $h(x) = (3x + 5)^2 - 1 \geq 0$ pour $x \in$]–õ ; –2] $\cup$ [–4/3 ; +õ[, ce que la considération de l'expression factorisée de $h(x)$ permet de prouver algébriquement : pour $x \leq -2$, $(x + 2) \leq 0$ et $(3x + 4) \leq 0$, donc le produit $3(x + 2)(3x + 4)$ est positif ; pour $x \geq -4/3$, $(x + 2) \geq 0$ et $(3x + 4) \geq 0$, donc le produit $3(x + 2)(3x + 4)$ est positif ; pour $-2 < x < -4/3$, $(x + 2) > 0$ et $(3x + 4) < 0$, donc le produit $3(x + 2)(3x + 4)$ est strictement négatif.

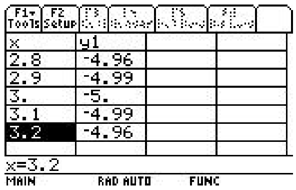
La technique algébrique est ici lourde et peu adaptée. On peut la remplacer par la technique analytique suivante. La représentation graphique de la fonction $h(x) = (3x + 5)^2 - 1$ étant une parabole de sommet S (–5/3 ; –1), et le coefficient du terme en x^2 étant positif, h est décroissante sur]–õ ; –5/3] et croissante sur [–5/3 ; +õ[. –2 appartient à]–õ ; –5/3], $h(-2) = 0$ et h décroissante sur]–õ ; –5/3] donnent donc que pour x appartenant à]–õ ; –5/3], $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$; de même –4/3 appartient à [–5/3 ; +õ[, $h(-4/3) = 0$ et h croissante sur [–5/3 ; +õ[, donnent que pour x appartenant à [–5/3 ; +õ[, $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4/3$. On notera que cette technique repose sur des résultats technologiques comme la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction, le fait que la représentation graphique d'une fonction du type $(ax + b)^2+c$ est une parabole de sommet $(-b/a ; c)$ etc, alors que la technique précédente était justifiée pour l'essentiel par le résultat donnant le signe d'un produit de facteurs.

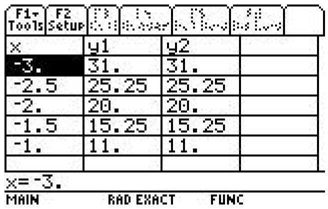
Donnons un autre exemple, à travers le type de tâches « étudier une fonction du second degré », de ce que pourrait signifier « utiliser la calculatrice pour étudier des mathématiques », en considérant le spécimen suivant de ce type de tâches : étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 4$.

La représentation graphique de la fonction considérée à la calculatrice sur l'intervalle [–10 ; 10] (voir ci-dessous) suggère que la fonction est décroissante sur]–∞ ; 3], croissante sur [3 ; +∞[et qu'elle admet un minimum en 3 ; la tabulation autour de $f(3)$ permet une vérification sommaire et donne la valeur du minimum, –5. Il s'agit alors de prouver analytiquement ces affirmations.









La mise sous forme canonique donne : $f(x) = x^2 - 2\times3x + 4 = (x-3)^2 - 5$, ce que l'on peut vérifier par la tabulation des fonctions $x \mapsto (x-3)^2 - 5$ et $x \mapsto = x^2 - 6x + 4$ (voir ci-contre).
Cette mise sous forme canonique permet alors de justifier les deux affirmations précédentes. En effet, $(x-3)^2$ étant positif sur $\mathbb{R}$, il vient que $f(x) \geq -5$, soit que -5 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, ce minimum étant atteint lorsque $(x-3)^2 = 0$, soit lorsque $x = 3$. De plus, la fonction $x \mapsto x^2$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$, la fonction $x \mapsto (x-3)^2$ est décroissante pour $x \leq 3$ et croissante pour $x \geq 3$, et il en est de même de la fonction $x \mapsto (x-3)^2 - 5$. La fonction $f : x \mapsto (x-3)^2 - 5$ est donc décroissante pour $x \in\ ]-\infty\ ;\ 3]$ et croissante pour $x \in [3\ ;\ +\infty[$.
Notons ici que le résultat technologique principal qui justifie cette technique est le sens de variation de la fonction carré.

3. Conditions écologiques d'intégration

La technique mise en œuvre précédemment permet d'inscrire dans le *topos* de l'élève le découpage en sous-types de tâches du type de tâches « étudier une fonction du second degré », par le biais d'expérimentations effectuées à la calculatrice, et de vérifier numériquement la mise sous forme canonique[4]. On a là, comme dans les exemples précédents, l'un des ingrédients essentiels qui conditionne l'existence de la calculatrice dans les praxéologies mathématiques, et donc, de fait, dans les praxéologies didactiques : l'insertion dans les techniques mathématiques des fonctions d'expérimentation et de vérification ou de contrôle, fonctions que la calculatrice va permettre de réaliser. Cette modification des praxéologies, résolument *fonctionnelle*, est solidaire d'un déplacement de la frontière topogénétique, qui voit la dévolution aux élèves de types de tâches anciennement accomplies par le professeur : on l'a dit plus haut en ce qui concerne l'expérimentation ; il en est de même à l'égard du contrôle, qui permet à l'élève de porter un jugement sur son travail.

Le rôle du professeur dans l'étude change donc assez radicalement. C'est ainsi que Krystyna Dalek, présentant « L'introduction des calculatrices graphiques dans l'enseignement en Pologne » aux *Journées d'études « Environnements informatiques de calcul symbolique et apprentissage des mathématiques » à* Rennes en juin 2000, écrivait à propos des fonctions et des graphes de fonctions (Dalek 2000, page) :

> La visualisation graphique des fonctions est l'application la mieux comprise et la mieux acceptée d'une calculatrice graphique. Les enseignants aiment utiliser les fonctions graphiques et montrer des graphes de fonctions, mais cette présentation ne constitue le plus souvent qu'un supplément du cours traditionnel.
>
> On commence traditionnellement par la théorie et les formules pour passer ensuite à la visualisation des graphes. La calculatrice sert surtout à vérifier. Le renversement de cette approche, par exemple en introduisant la fonction carrée à partir de son graphe, pour permettre aux

---

[4] Notons que cette vérification numérique peut se faire « à la main » mais que l'utilisation de la calculatrice en rend le coût quasi nul.

élèves d'observer ses propriétés, proposer et vérifier des hypothèses, constitue une nouveauté pour nos enseignants. Ils n'ont pas confiance dans le travail individuel des étudiants, ils ont peur d'une individualisation trop poussée et pensent que cela nuit à une « approche mathématique correcte ».

Nous avons observé ce cours dans une de nos écoles.

Les élèves ont reçu des feuilles avec les recommandations suivantes.

1) Vérifier le comportement de la fonction $y = ax^2$ pour différentes valeurs du coefficient $a > 0$.
2) Vérifier le comportement de la fonction $y = ax^2$ pour différentes valeurs du coefficient $a < 0$.
3. Notez vos observations et vos remarques.

Les feuilles comportaient aussi des explications permettant d'obtenir le graphe sur une calculatrice.

L'observation du travail des élèves a montré des approches très différentes du problème. Plusieurs élèves ont procédé de manière chaotique, plusieurs ont eu des difficultés pour interpréter le graphe. Le nombre de tests effectués allait de 5 à 27.

Beaucoup d'élèves avaient des difficultés pour noter leurs observations. Leurs notes étaient généralement assez maladroites et ne correspondaient pas à la richesse de leurs expériences.

Pour certains enseignants qui observaient le cours avec nous, les différences qui sont apparues entre les élèves et leurs difficultés, ne témoignaient pas en faveur de ce type de cours.

Cet exemple met en lumière des conditions qui empêchent, gênent l'existence du genre de tâches expérimenter : les enseignants n'ont pas de techniques didactiques pour réaliser de l'expérimentation dans le cadre des moments exploratoire et technologico-théorique ; ils n'ont pas d'éléments technologico-théoriques didactiques qui justifient, rendent intelligible le genre de tâches « expérimenter », alors que l'existence de tels éléments constitue une condition essentielle pour qu'une praxéologie didactique puisse vivre (Chevallard 1995, Artaud 1997).

Il fait également apparaître la difficulté du déplacement topogénétique : s'il s'agit ici de faire émerger les résultats technologiques relatifs aux variations de la fonction qui à x associe ax^2, donner d'emblée le découpage en deux cas $a < 0$ et $a > 0$ par l'intermédiaire des deux questions proposées limite sans véritable raison l'autonomie des élèves dans la fonction d'expérimentation.

Un autre élément apparaît en filigrane des observations rapportées, et est manifeste dès que l'on examine les conditions de réalisation des différents moments didactiques : le manque *d'ostensifs écrits*, permettant que l'élève puisse rendre compte publiquement de l'expérimentation effectuée à la calculatrice. Il en irait tout autrement par exemple si l'on disposait d'une imprimante qui permettent de coller sur les copies ou les cahiers les copies des écrans des calculatrices ainsi que nous l'avons fait plus haut par l'intermédiaire d'un émulateur. On peut pallier à cet écueil sans grande difficulté nous semble-t-il (Artaud et Denisot 2000), mais il révèle peut-être d'abord la difficulté d'existence de l'expérimentation et de la vérification dans l'activité mathématique scolaire.

Pour terminer, intégrer les calculatrices dans l'enseignement des mathématiques suppose non seulement la modification des praxéologies mathématiques et didactiques du côté des pratiques – notamment du point de vue de l'intégration de l'expérimentation et de la vérification dans les techniques, de la création d'ostensifs écrits, des types de tâches faisant partie du topos de l'élève –, mais aussi du côté des éléments technologico-théoriques mobilisés : ce second aspect, fort peu pris en charge actuellement dans la recherche, est pourtant essentiel car il conditionne de manière essentielle l'existence du premier.

RÉFÉRENCES

Michèle Artaud. Introduction à l'approche écologique du didactique – L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la neuvième École d'été de didactique des mathématiques*. Caen : ARDM&IUFM, 1998. pp. 101-139.

Michèle Artaud et Joël Denisot. Structures, fonctionnement, écologie des organisations didactiques – À propos de calculatrice. *Actes de la XI^e^ école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage éditions. pp. 97-107. 2002.

Yves Chevallard. Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **17(3)** 17-54. 1997.

Yves Chevallard. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19(2)**, 221-266. 1999.

Yves Chevallard. Organiser l'étude – 3. Écologie et régulation. *Actes de la XI^e^ école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage éditions. pp. 41-56. 2002.

Krystyna Dalek. L'introduction des calculatrices graphiques dans l'enseignement en Pologne. *In Actes des journées d'études « Environnements informatiques de calcul symbolique et apprentissage des mathématiques »,* 15-16 juin 2000, Rennes. pages 147-152.

Landy Rajoson. *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*. Thèse pour l'obtention du grade de docteur de troisième cycle de l'Université d'Aix-Marseille II. Marseille, 1988.

ANNEXE - PRAXÉOLOGIES DIDACTIQUES

Une praxéologie didactique s'organise autour d'un type de tâches, T_δ : enseigner une praxéologie mathématique déterminée. La technique de réalisation de ce type de tâches peut se décrire en utilisant les six types de tâches suivants, qui sont autant de *moments* du processus d'étude de l'organisation mathématique, un moment pouvant être réalisé en plusieurs fois. Il y a un moment où l'on va rencontrer « pour la première fois »[5] un élément de l'organisation mathématique, ce que l'on va nommer le *moment de la (première) rencontre* ; un moment où l'on va explorer le ou les type(s) de tâches de manière à fabriquer au moins une technique d'étude de ce(s) type(s) de tâches – *moment exploratoire* ; un moment où il s'agit de *constituer le ou les environnements technologico-théoriques* qui vont justifier les techniques mises en place – *moment technologico-théorique*. Il s'agira ensuite de mettre en forme l'organisation mathématique en construction, ce qui est l'objet d'un quatrième moment, le *moment de l'institutionnalisation*. Dans un cinquième *moment*, le *travail de l'organisation mathématique* va permettre notamment de se mettre en main les techniques créées et d'accroître la fiabilité de leur mise en œuvre[6]. Le sixième *moment*, celui *de l'évaluation*, permet d'examiner ce que vaut l'organisation mathématique mise en place ainsi que la maîtrise qu'on en a.

Analyser une praxéologie didactique, c'est ainsi analyser la façon dont sont réalisés (ou ne sont pas réalisés) les six moments de l'étude ; il en ira de même pour l'évaluation et le développement d'une praxéologie didactique. Notons pour terminer que l'ordre dans lequel les moments didactiques ont été présentés est d'abord un ordre d'exposition.

[5]

[6] Mais c'est bien du travail de l'organisation mathématique dans son ensemble qu'il s'agit.